第 26 卷第 3 期
2002 年 6 月

水 产 学 报
JOURNAL OF FISHERIES OF CHINA

Vol. 26, No. 3
June, 2002

文章编号:1000 - 0615(2002)03 - 0281 - 04

·研究简报·

鱼类生长的幂指数生长方程

陆小菪[1], 陆文杰[2], 郑光明[1], 朱新平[1]

(1. 中国水产科学研究院珠江水产研究所,农业部热带亚热带鱼类选育与养殖重点开放实验室,
广东 广州 510380; 2. 广东省林业局,广东 广州 510173)

关键词:鱼类生长;幂指数生长方程;数学模型
中图分类号:S931.1 文献标识码: A

Power-exponential growth equation of fish growth

LU Xiao-dan[1], LU Wen-jie[2], ZHENG Guang-ming[1], ZHU Xin-ping[1]

(1. *Pearl River Fisheries Research Institute Certificated by the Chinese Academy of Fisheries Sciences, Key Laboratory of Tropical & Subtropical Fish Breeding & Cultivation, Ministry of Agriculture, Guangzhou* 510380, *China;*
2. *Guangdong Forest Bureau, Guangzhou* 510173, *China)*

Abstract: Von Bertalanffy equation was analyzed in theory and compared for fitting with a lot of present data between the power-exponential equation of growth and von Bertalanffy's. It was discovered that power-exponential growth equation was more applicable and fitting than von Bertalanffy's and was also deduced by modifying von Bertalanffy equation. Comparing with other eight growth mathematical models, the relation index for fitting and applicable range of the power-exponential growth equation was the best in all models.

Key words: fish growth; power-exponential growth equation; mathematical model

研究鱼类生长往往需要选择适当的数学模型来处理实际数据以表征生长的某些特点,或用于比较生长速度,或用于消除随机因素的影响,使生长曲线圆润化,以显示生长的趋势。其中受到高度重视并被广泛应用的是贝特朗菲方程(von Bertalanffy equation)。然而该模型在理论上有不足之处,适用范围也不够理想。为此,取陆文杰[1]对林木生长研究中提出并命名的数学模型——幂指数生长方程,用大量的鱼类生长数据[2-6]验证结果,证实该方程比贝氏方程更适于研究鱼类生长规律。

1 材料与方法

1.1 数据及其来源

共 124 份,750 组数据,主要引自参考文献[2]、[3]。

1.2 数据处理

采用最小二乘法求出九种数学模型的各参数值,确定拟合方程。取相关指数 R 作为评价曲线拟合吻合度的指标:

收稿日期:2001-07-13
基金项目:农业部行业标准项目(200212)
作者简介:陆小菪(1955 -),女,江苏吴江人,助理研究员,学士,主要从事淡水渔业研究。Tel:020 - 81501531, E-mail:fishstdd@public.guangzhou.gd.cn

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(G - \hat{G})^2}{\Sigma(G - \bar{G})^2}}$$

式中，$\hat{G}$ 为各龄理论(估计)生长量，$\bar{G}$ 平均生长量。

2 结果

对 124 份鱼类生长数据用幂指数生长方程和贝氏方程分别进行拟合的结果，贝氏方程不能拟合的占 21.8%(27 份)，幂指数生长方程的则为 0，适用性较贝氏方程强。贝氏方程拟合的 $R \geq 0.99$ 的为 59.7%(74 份)，幂指数生长方程的为 84.7%(105 份)，拟合精度较贝氏方程高。因幂指数生长方程的拟合不受年龄是否成等差级数的限制，体长、体重数据可分别拟合，不因理论极限生长量小于既有生长量而不能拟合等优点，可以认为，幂指数方程至少可以与贝氏方程媲美。124 份数据中取有代表性的 4 份数据拟合比较，结果见表 1，拟合曲线图见图 1。如图 1 所示，幂指数生长方程较贝氏方程更贴近实测数据的轨迹，吻合度更高。

表 1 幂指数生长方程与贝氏方程拟合结果比较

Tab.1 Comparison between the fitting of the Power-exponential equation and von Bertalanffy's

序号 No.	鱼 fish	数据 data 年龄(年)；体长(厘米)；体重(公斤) age(y)；L(cm)；W(kg)	幂指数生长方程 power-exponential equation $G = Ae^{Bt^C}$	相关指数 relation index R_{Pe}	贝氏方程 von Bertalanffy equation $L = L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})$ $W = W_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})^d$	相关指数 relation index R_B
1	青鱼(内蒙岱海) *Mylopharyngodon piceus*	age: 1,2,3,4 L: 12,23.1,36.8,48.7[1]	$L = 0.0000941e^{11.7479t^{0.0196}}$	0.9994	($L_\infty < L$, Unfitting)	-
2	草鱼(♂) *Ctenopharyngodon idellus*	age: 1,2,3,4,5 L: 34.6,59.8,67.7,73.7,76.3[2]	$L = 85.6335e^{-0.9036t^{-1.2798}}$	0.9993	$L = 76.8842(1 - e^{-1.024(t-0.6004)})$	0.9611
3	鳙(♂) *Aristichthys nobilis*	age: 1,2,3,4,5,6,7,8 W: 0.27,2.6,7.4,10.1,13.5,16.6,20,21.5[2]	$W = 47.1500e^{-5.1988t^{-0.8986}}$	0.9979	$W = 20.7616(1 - e^{-0.4865(t-0.5687)})^{2.9026}$	0.9868
4	鲤(汉江) *Cyprinus carpio*	age: 1,2,3,4,5,6 W: 0.14,1.18,2.63,4.36,5.33,6.44[1]	$W = 17.7081e^{-4.8630t^{-0.8702}}$	0.9988	$W = 7.9182(1 - e^{-0.4443(t-0.3506)})^{2.8422}$	0.9985

3 讨论

3.1 贝特朗菲生长方程

贝氏方程属推理型数学模型。这类模型从某些假设出发，通过数学推导而获得，试图阐述研究对象发展变化的原因和机制。显然，其假设的正确与否决定了推导出的模型的适应性与吻合度的高低。贝氏方程的基本假设是：同化作用 H 与机体有效吸收表面积 A 成正比；吸收表面积 A 与体长 L 的平方成正比；体重 W 与体长的 3 次方成正比；异化作用 Y 与体重 W 成正比[5,6]。据此推导出体长(1)和体重(2)方程：

$$L = L_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}] \quad (1)$$

$$W = W_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^3 \quad (2)$$

式中：L_∞和 W_∞为体长和体重的极限生长量；k 为常数；t_0 为体长或体重等于 0 的年龄。

然而"体重与体长的 3 次方成正比"这一假设颇受置疑，因此后来修正"3"为待定参数 d：

$$W = W_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^d \quad (3)$$

1979 年 Pauly 在贝氏方程中引进了"表面因子"D：

$$L = L_\infty[1 - e^{-kD(t-t_0)}]^{1/D} \quad (4)$$

$$W = W_\infty[1 - e^{-KD^{3/d}(t-t_0)}]^{d/D} \quad (5)$$

当 D = 1 时,(5) 式等于(3) 式;当 D = 1、d = 3 时,(4) 、(5) 式等于(1) 、(2) 式。因此有人把(4) 、(5) 式称作"一般的"贝氏方程,(3) 式称作"改良的"贝氏方程,而原先的(1) 、(2) 式则被称作"特殊的"贝氏方程。此外,为了拟合年内的生长,Daget 和 Ecoutin 等人也提出了各种修正,贝氏方程变得更为复杂。实际上用得较多的还是(1) 、(2) 、(3) 式。

贝氏方程有其不尽人意之处:①理论上 $t_0 > 0$,但这意味着 $t = 0$ 时生长量将为负值,拟合生长初期的数据时吻合度往往较差。因此,有人认为贝氏方程只适用于阶段性拟合而不适用于拟合生长全程。②年龄数据不为等差数列者不能拟合。③只有体重数据而无体长数据者无法拟合。④极限值小于既有生长量时无法拟合。

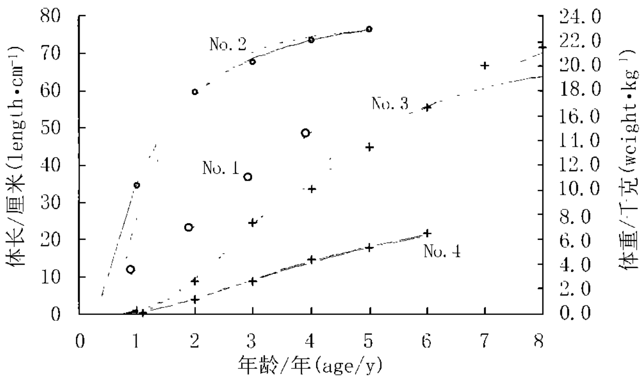

图 1 幂指数生长方程和贝氏方程拟合的鱼类生长方程曲线图比较

Fig. 1 Comparison of curves of the power-exponential equation and von Bertalanffy equation

○length data; + weight data; - curve of P. E.; ·· curve of B. E.

贝氏方程的不足大多源于其不当的假设。假设"同化作用与有效吸收表面积成正比而有效吸收表面积又与体长的平方成正比"似有不妥。鱼类主要靠肠系吸收营养,其表面积不可能与体长的平方成正比。不同食性的鱼类肠道差异极大,如肉食性的乌鳢,肠道长度仅为体长的 1/3～1/4;而草食性鱼类则可达体长的十几倍。肠道比还随年龄而变化,如鲫体长从 0.6cm 长到 14cm,肠道比则从体长的 1/4 演化到 2 倍。此外,"异化作用与体重成正比"没有考虑年龄的影响;"体长与体重的 3 次方成正比"并非普遍规律。

3.2 幂指数生长方程

幂指数生长方程同属推理型数学模型。它假设生物在一定的遗传内因和环境外因条件下,推动生长的"力"与阻碍生长的"力"互相拮抗的综合影响,使生长全程呈 S 形曲折发展。就鱼类而言,在一定条件下,体重的绝对生长率 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ 与既有体重 W 成正比,与其衰老程度 t^{k_1} 成反比。如上述假设:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{K_2 W}{t^{K_1}}$$

成立,积分得出:$W = Ae^{Bt^c}$ $\left(B = \frac{k_2}{1 - k_1}, C = 1 - K_1\right)$

此为体重生长方程。又设体长与体重是幂函数关系,其乘幂值作为待定参数由实测数据来确定。为此,上式中的体重生长量 W 可用包括体长和体重的既有生长量 G 代替:

$$G = Ae^{Bt^c}$$

此为广义的幂指数生长方程。

$C > 0$ 时,如只用生长早期数据拟合,是为 Ⅱ型,曲线呈单调上升,具指数曲线性质,无极限生长量。$C = 1$ 时,为指数生长方程。通常的,尤其对于接近生命全程的生长数据,$C < 0$,曲线成 S 形,是为 Ⅰ型。此时的 A 为特定条件下该鱼可能达到的极限生长量,在年龄、物种相同的情况下,其大小可以反映出外部环境条件的好坏以及遗传性状的改变。I 型方程可进一步推导出:

①$\mathrm{d}G/\mathrm{d}t$ ——鱼龄为 t 时的瞬时生长速度,即生长方程的一阶导数:$\mathrm{d}G/\mathrm{d}t = ABCt^{C-1}e^{Bt^C}$

②$\mathrm{d}G/\mathrm{d}t/G$ ——绝对生长率与当时总生长量之比,即相对生长率:$\mathrm{d}G/\mathrm{d}t/G = BCt^{C-1}$

③生长最快的时间 t_f ——即生长方程的二阶导数为 0 时 t 的解:$t_f = \left(\frac{BC}{1 - C}\right)^{-\frac{1}{C}}$

④理论经济捕捞时间 t_C ——即理论上的平均生长量(一般指体重)达到最大的时间,也就是 $\mathrm{d}(W/t)/\mathrm{d}t = 0$ 时的 t 的解:$t_C = (BC)^{-\frac{1}{C}}$

当然这种推算对于不是匀速生长的鱼类而言只是个大概的指标。

3.3 幂指数生长方程与贝氏方程的关系

倘若将贝氏方程的原假设作以下修正:

①保留"单位时间内体重的增长量为同化量与异化量之差"的假设:$\Delta W = H - Y$。

②假设体重越大或年龄越小,新陈代谢越旺盛。即同化量与体重成正比,与年龄的 k_1 幂成反比,异化量亦然:$H \propto Wt^{-k_1}$, $Y \propto Wt^{-k_1}$;或 $H = k_2 Wt^{-k_1}$, $Y = k_3 Wt^{-k_1}$。

③假设体重与体长的 d 次幂成正比,即:$L \propto W^{1/d}$;或 $L = k_4 W^{1/d}$。

据此,下式:

$$\frac{dW}{dt} = H - Y = (k_2 - k_3) Wt^{-k_1}$$

成立,积分得出:$W = Ae^{Bt^c}$

因此也得出广义的幂指数生长方程:$G = Ae^{Bt^c}$。

由此可见,修正后的贝氏方程实际就是幂指数方程。从不同的假设得出了相同的结论。

3.4 九种生长模型的比较

以幂指数方程等九种生长模型分别拟合 124 份鱼类生长数据的相关指数的平均值作比较(表 2),结果显示,幂指数生长方程未能拟合的数量最少,平均的相关指数最高,贝氏方程居次。若考虑到贝氏方程有 21.8 %的资料不能拟合,它的实际应用价值恐怕还不及线性方程和逻辑斯蒂方程。这说明对于不是在严格控制的实验条件下取得的生长数据,因存在各种因素的巨大影响,不必追求过分复杂的模型。

3.5 幂指数生长方程的应用前景

应用幂指数生长方程不仅可拟合鱼、虾、鳖、贝类的生长资料作生长分析,还可有更广泛的应用前景。如用于预测生长量,其准确程度取决于原始资料和预测的远近。或作评价养殖环境的指标,在不同的地方以相同的养殖模式养殖相同的品种,相同年龄条件下显示的生长差异反映出养殖条件的差异。或作种质资源监测指标,如珠江流域的鲮出现体长的小型化现象,可视为种质衰退的信号之一。

表 2 幂指数方程等九种生长模型拟合 124 份鱼类生长数据的相关指数平均值的比较

Tab.2 Comparison of the average relation indexes of nine growth models by fitting 124 groups fish growth data

模型 model	幂指数方程 power-exponential	贝氏方程 von Bertalanffy	幂函数 power	指数 I exponential	指数 II exponential	S 形 s-model	逻辑斯蒂 logistic	Gompertz	直线 line
公式 formula	$G = Ae^{Bt^c}$	$L = L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})$ $W = W_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})^d$	$Y = At^B$	$Y = Ae^{Bt}$	$Y = Ae^{-B/t}$	$Y = 1/(A + Be^{-t})$	$Y = A/(1 + Be^{-\alpha t})$	$Y = Ae^{-Be^{-\alpha}}$	$Y = A + Bt$
相关指数平均值 average relation index R	0.9935	0.9925	0.9666	0.8940	0.9299	0.9101	0.9718	0.7388	0.9749
未能拟合数 unfitting no.	0	27	2	6	0	21	6	11	0

参考文献:

[1] Lu W J. Power-exponential equation of growth and its application on analysis in forest growth[J]. Forest Science. 1981,3:291 - 296. [陆文杰. 幂指数生长方程及其在林木生长分析中的应用[J]. 林业科学,1981,3:291 - 296.]

[2] Zhang Y Z, Tan YJ,Ouyang H. Pond fish culture in China[M]. Beijing:Science Publishing Company,1989. 22 - 27. [张扬宗,谭玉钧,欧阳海. 中国池塘养鱼学[M]. 北京:科学出版社,1989. 22 - 27.]

[3] Fish Research Laboratory, Hubei Hydro-biology Institute. Fishes in Chang-jiang River[M]. Beijing: Science Publishing Company,1976. 21 - 212. [湖北水生生物研究所鱼类研究室. 长江鱼类[M]. 北京:科学出版社,1976. 21 - 212.]

[4] Ma R H, Li J E, Ding Y W, et al. Preliminary studies on the artificial propagation and the seedling rearing of flat bream, *Rhabdosargus sarba* (Forskäl) [A]. South China Sea Fisheries Research No. 1[C]. 1989. 1 - 8. [马荣和,李加儿,丁彦文,等. 平鲷人工繁殖及育苗的初步研究[A]. 南海水产研究文集(第一辑)[C]. 1989. 1 - 8.]

[5] Fei H N, Zhang S Q. Fisheries resource[M]. Beijing:Sci & Tec Publishing Company of China,1990. 254 - 257. [费鸿年,张诗全. 水产资源学[M]. 北京:中国科技出版社,1990. 254 - 257.]

[6] Li S F. Population ecology of freshwater fishes[M]. Beijing:Agriculture Publishing Company,1990. 31 - 42. [李思发. 淡水鱼类种群生态学[M]. 北京:农业出版社,1990. 31 - 42.]